

COMBINAZIONE LINEARE

$$\underline{a} = (a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

una ***n-upla ordinata*** di numeri reali



$$\underline{b} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n$$

è la ***combinazione lineare*** degli a_i
mediante i numeri reali λ_i

LINEARE INDIPENDENZA

n vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$



I CASO

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ tali che $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$ ammette

solo la soluzione banale, ovvero $\underline{\lambda} = \underline{0}$



lineare indipendenza (L.I.)

LINEARE DIPENDENZA

n vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$



II CASO

$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ tali che $\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = 0$ ammette,

oltre alla soluzione banale, anche altre soluzioni non nulle



lineare dipendenza (L.D.)

Osservazione!

$$m = n$$

n vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono

linearmente indipendenti

se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \dots \\ \underline{a}_i \\ \dots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

i -esima n -upla ordinata di numeri reali

$$m < n$$

m vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_m$ sono

linearmente indipendenti

se e solo se

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

contiene un minore di ordine massimo non nullo

Esempio 1

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3)$$

$$\underline{v}_2 = (2, 1, 2)$$

$$\underline{v}_3 = (3, 2, 1)$$



osservazione

$$\det \begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$



lineare indipendenza

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3) \quad \underline{v}_2 = (2, 1, 2) \quad \underline{v}_3 = (3, 2, 1)$$

 **definizione**

$$\lambda (1, 2, 3) + \mu (2, 1, 2) + \nu (3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$



$$(\lambda + 2\mu + 3\nu, 2\lambda + \mu + 2\nu, 3\lambda + 2\mu + \nu) = (0, 0, 0)$$



$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ 3\lambda + 2\mu + \nu = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ -3\mu - 4\nu = 0 \\ -4\mu - 8\nu = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ 3\mu + 4\nu = 0 \\ \mu + 4\nu = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ 8\nu = 0 \\ \mu + 4\nu = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$



lineare indipendenza

Esempio 2

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, -1) \quad \underline{v}_2 = (2, 1, 3, 4) \quad \underline{v}_3 = (4, 5, 9, 2)$$

 **osservazione**

$$\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

ha tutti i minori di ordine massimo nulli



lineare dipendenza

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, -1) \quad \underline{v}_2 = (2, 1, 3, 4) \quad \underline{v}_3 = (4, 5, 9, 2)$$

 **definizione**

$$\lambda (1, 2, 3, -1) + \mu (2, 1, 3, 4) + \nu (4, 5, 9, 2) = (0, 0, 0, 0)$$



$$(\lambda + 2\mu + 4\nu, 2\lambda + \mu + 5\nu, 3\lambda + 3\mu + 9\nu, -\lambda + 4\mu + 2\nu) = (0, 0, 0, 0)$$



$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 5\nu = 0 \\ 3\lambda + 3\mu + 9\nu = 0 \\ -\lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \\ \nu = -1 \end{cases}$$



**oltre alla soluzione banale
ci sono altre soluzioni non nulle**



lineare dipendenza